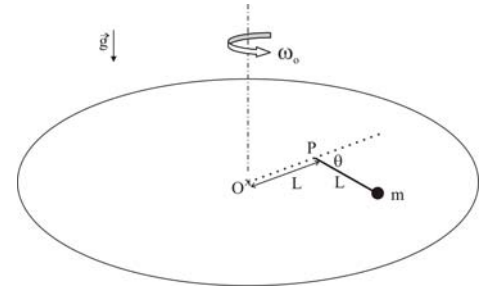


1. Una plataforma horizontal gira con velocidad angular constante, ω_0 , en torno a un eje vertical que pasa por el punto O. Una partícula de masa m sobre la plataforma se encuentra atada a una cuerda ideal de largo L cuyo otro extremo está fijo a la plataforma en el punto P, ubicado a una distancia L del punto O. La partícula se libera desde el reposo relativo a la plataforma estando la cuerda perpendicular a la recta OP ($\theta(t=0) = 90^\circ$ en la figura). Despreciando todo tipo de roce se pide:

- a) Encontrar una expresión para la velocidad angular $\dot{\theta}(\theta)$.
- b) Determinar el (los) valor(es) que tiene la tensión de la cuerda cuando la partícula pasa por $\theta = 0^\circ$.

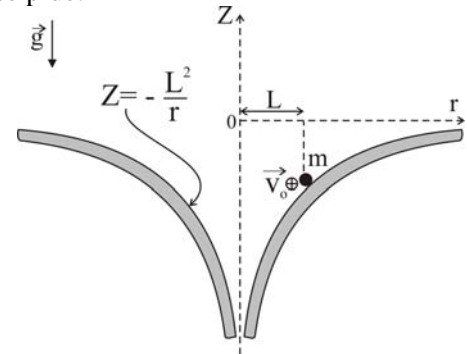
$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

Indicación: asuma que la cuerda siempre está tensa.



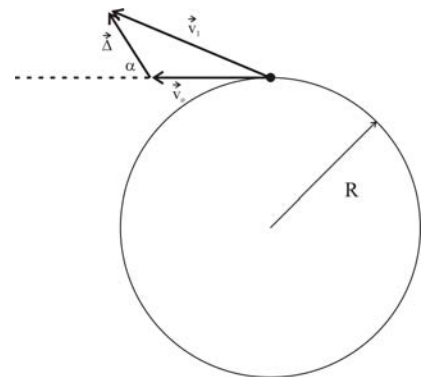
2. Una partícula de masa m se mueve sin roce por el interior de un embudo de eje vertical, cuya superficie se puede representar con la expresión $Z(r) = -\frac{L^2}{r}$, donde L es una constante conocida y r es la coordenada radial cilíndrica. Si en la condición inicial la partícula está a una distancia L del eje del embudo, y tiene una velocidad tangente a la superficie, horizontal y de magnitud v_o , se pide:

- a) Determinar el valor de v_o tal que la partícula se mantenga rotando siempre a la misma altura. (2 puntos)
- b) Si v_o tiene un valor igual a la mitad del encontrado en a) determine la mínima altura a la que llega la partícula en su movimiento. (4 puntos)



3. Un satélite de masa m gira en torno a la Tierra en una trayectoria circular de radio R . En $t=0$ sus cohetes le cambian "instantáneamente" su velocidad. En $t=0^+$ la velocidad del satélite es $\vec{v}_1 = \vec{v}_o + \vec{\Delta}$, donde \vec{v}_o es su velocidad pre-impulso y $\vec{\Delta}$ es el cambio de velocidad debido al impulso de los cohetes. Considere que $\vec{\Delta}$ tiene magnitud Δ y forma un ángulo α con \vec{v}_o como muestra la figura.

- a) ¿Qué valor tiene la energía mecánica total del satélite justo antes del impulso, en función de R ?
- b) Lo mismo, pero justo después del impulso, en función de R , α y Δ .
- c) En base a lo anterior determine el mínimo valor de Δ con el cual el satélite logra escapar de la atracción terrestre, indicando a su vez el valor del ángulo α correspondiente.



$$r(\theta) = \frac{h^2 / C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{C^2}} \cos \theta}$$

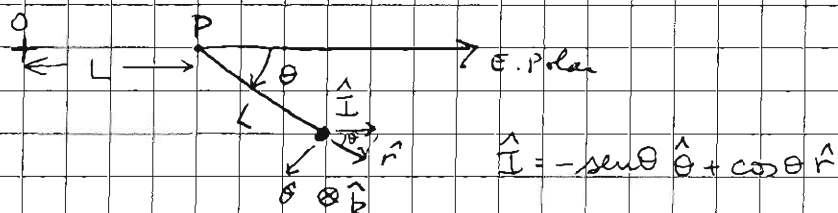
$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e \cos \theta}$$

Indicación: $C = GM$ conocido.

C3 2007/2

(P1)

1/2



$$\vec{a}_o = L\omega_o^2 (-\hat{I})$$

$$-m\vec{a}_o = mL\omega_o^2 \hat{I} = mL\omega_o^2 (-\sin\theta \hat{\theta} + \cos\theta \hat{r})$$

$$\vec{\Omega}_e = -\omega_o \hat{k} \quad (\text{notar que } \hat{k} \text{ entra al plano})$$

$$\vec{r} = r \hat{r} = L \hat{r}$$

$$\vec{v} = L\dot{\theta} \hat{\theta}$$

(r, \hat{r} , $\hat{\theta}$, \hat{k})

$$\vec{a} = -L\ddot{\theta} \hat{r} + L\dot{\theta}^2 \hat{\theta}$$

$$-2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} = -2m\omega_o(-\hat{k}) \times L\dot{\theta} \hat{\theta} = -2mL\omega_o \dot{\theta} \hat{r}$$

$$\vec{\Omega}_e \times \vec{r} = -\omega_o \hat{k} \times L \hat{r} = -\omega_o L \hat{\theta}$$

$$\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) = -\omega_o \hat{k} \times (-\omega_o L \hat{\theta}) = \omega_o^2 L (-\hat{r})$$

$$-m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) = m\omega_o^2 L \hat{r}$$

$$\vec{a}_e = \vec{0}$$

$$\hat{r} : -mL\dot{\theta}^2 = -T + mL\omega_o^2 \cos\theta - 2mL\omega_o \dot{\theta} + mL\omega_o^2 L$$

$$\hat{\theta} : mL\ddot{\theta} = -mL\omega_o^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$$

2/2

$$\ddot{\theta} d\theta = -\omega_0^2 \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \ddot{\theta} d\dot{\theta} = -\omega_0^2 \int_{+90^\circ}^{\theta} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\omega_0^2 \left[-\cos \theta \right]_{90^\circ}^{\theta} = -\omega_0^2 \left[-\cos \theta + 0 \right]$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \cos \theta}$$

$$b) T = mL\dot{\theta}^2 + mL\omega_0^2(1 + \cos \theta) - 2mL\omega_0\dot{\theta}$$

$$T = mL\omega_0^2(1 + 3\cos \theta) - 2mL\omega_0\dot{\theta}$$

a la "ida":

$$\theta = 0 \text{ y } \dot{\theta} = -\sqrt{2} \omega_0 \cos \theta = -\sqrt{2} \omega_0$$

$$T = mL\omega_0^2 \cdot 4 + 2mL\omega_0 \sqrt{2} \omega_0$$

$$\boxed{T = mL\omega_0^2 (4 + 2\sqrt{2})}$$

a la "vuelta": $\theta = 0 \quad \dot{\theta} = +\sqrt{2} \omega_0$

$$\boxed{T = mL\omega_0^2 (4 - 2\sqrt{2})} > 0$$

(P2)



$$z = -\frac{L^2}{r}$$

el ángulo de la Normal es 1 a la tangente de la superficie.

$$\frac{dz}{dr} = \frac{L^2}{r^2}$$

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=L} = 1 \Rightarrow \text{tangente } 45^\circ$$

∴ para la condición de momento angular uniforme

$$\begin{array}{l} \uparrow k: \quad \frac{N}{\sqrt{2}} = mg \\ \uparrow r: \quad -m \frac{v_0^2}{L} = -\frac{N}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0^2 = gL}$$

$$v_0 = \sqrt{gL}$$

b)

$$v_i = \frac{1}{2} \sqrt{gL}$$

la partícula conserva energía y la componente vertical del momento angular.

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_i^2 - mgL$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{1}{4} gL - mgL = -\frac{7}{8} mgL$$

$$L_0 = m v_i \cdot L = m \frac{1}{2} \sqrt{gL} L$$

Para la condición general.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + (r\ddot{\theta})^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$$

en la condición de altura mínima

$$\dot{z} = 0$$

$$\dot{r} = 0$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m (r\ddot{\theta})_*^2 + mgz_*$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{L_0}{m r_*} \right)^2 - mg \frac{L^2}{r_*}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{gL} L}{r_*} \right)^2 - mg \frac{L^2}{r_*} = -\frac{7}{8} mgL$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{8} \left(\frac{L}{r_*} \right)^2 - \left(\frac{L}{r_*} \right) = -\frac{7}{8}$$

$$\left(\frac{L}{r_*} \right)^2 - 8 \left(\frac{L}{r_*} \right) + 7 = 0$$

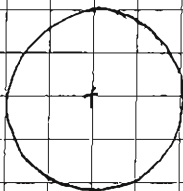
$$\left(\frac{L}{r_*} \right) = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 7}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{comp} \\ 7 \rightarrow \text{inter} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_* = \frac{L}{7}$$

$$z_* = - \frac{L^2}{\left(\frac{L}{7} \right)} = -7L$$

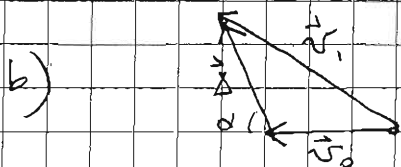
(P3)

1/2



a) órbita circular

$$E_- = -\frac{C}{2R}$$



$$E_+ = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{C}{R}$$

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{\Delta}) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{\Delta}) \\ &= v_0^2 + \Delta^2 + 2\Delta v_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

 v_0 sale de la órbita circular

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{C}{2R} \rightarrow v_0^2 = \frac{C}{R}$$

$$v_1^2 = \frac{C}{R} + \Delta^2 + 2\left(\frac{C}{R}\right)^{1/2} \Delta \cos \alpha$$

$$E_+ = -\frac{C}{2R} + \frac{1}{2} \Delta^2 + \sqrt{\frac{C}{R}} \Delta \cos \alpha$$

c) Para que escape "mínimamente" la nueva órbita debe ser parabólica con $E_t = 0$

$$\Delta^2 + \sqrt{\frac{C}{R}} 2 \cos \alpha \Delta - \frac{C}{R} = 0$$

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \frac{-2\sqrt{\frac{C}{R}} \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{C}{R} 4 \cos^2 \alpha + 4 \frac{C}{R}}}{2}$$

debemos tomar la solución positiva:

$$\Delta = \sqrt{\frac{C}{R}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right)$$

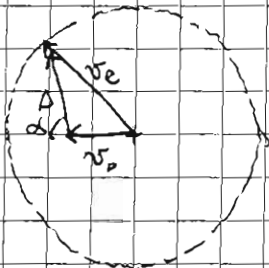
$\frac{d\Delta}{d\alpha} = \sec \alpha (\dots) \rightarrow$ el mínimo de Δ se da para $\alpha = 0$

(hay varias formas de mostrarlo).

$$\text{es } \Delta_{\min} = \sqrt{\frac{C}{R}} (\sqrt{2} - 1) \leftarrow$$

Esta parte se puede resolver también sólo con argumento físico / geométrico. El escape "mínimo" debe dar al satélite la "velocidad" de escape, es decir,

$$\|\vec{v}\| = v_e \text{ es la suma de velocidades}$$



de la figura el mínimo Δ que cumple $\|\vec{v}_0 + \vec{\Delta}\| = v_e$ se da para $\alpha = 0$ y $\Delta = v_e - v_0 =$